



TITLE:

代用電荷法に基づく双方向的な数値等角写像の方法(数値解析と科学計算)

AUTHOR(S):

天野, 要

CITATION:

天野, 要. 代用電荷法に基づく双方向的な数値等角写像の方法(数値解析と科学計算). 数理解析研究所講究録 1990, 717: 44-57

ISSUE DATE:

1990-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101775>

RIGHT:

代用電荷法に基づく双方向的な 数値等角写像の方法

愛媛大学工学部 天野 要 (Kaname Amano)

1. はじめに

数値等角写像の方法すなわち等角写像の数値計算法は、数値解析の課題の1つとして古くから研究され、近年再び注目を集めている。文献¹⁾にはその方法が系統的に記述されている。論文集²⁾には最近の研究成果が収められている。その序文に 1980 年代半ばの状況が次のように概観されている：数値等角写像の研究は、

- (a) 優れた方法が次々に提案されている、
- (b) 科学技術計算の現場との交流が少ない、
- (c) 一般理論 (general theory) が少ない、
- (d) ソフトウェアがない、

等の理由により、まだ急速な発展途上にあると考えられる。

数値等角写像の方法は、与えられた問題領域から標準領域への写像を求める方法と、逆に、標準領域から問題領域への写像を求める方法とに大別され、両者は比較的独立に研究されてきた。問題領域から標準領域への場合には、等角写像の問題を線形の積分方程式に帰着させる方法が主流であり、Symm の積分方程式法^{3~5)}が代表的である。しかし、この系列の方法は標準領域から問題領域への写像の計算には適していない。一方、標準領域から問題領域への場合には、等角写像の問題を非線形の積分方程式に帰着させる方法が主流であり、Theodorsen の積分方程式法^{6~8)}が代表的である。しかし、この系列の方法は問題領域から標準領

域への写像の計算には適していない。問題領域から標準領域への等角写像と標準領域から問題領域への等角写像の双方に適用できる方法の開発は数値等角写像における重要課題の1つである。

代用電荷法⁹⁾に基づいて、Laplace 方程式の Dirichlet 問題の解である調和関数とその共役調和関数を複素対数ポテンシャルの実部と虚部の1次結合で近似して、与えられた Jordan 領域、その外部、または有界な2重連結領域から、それぞれ、単位円の内部、その外部、または円環領域への等角写像を簡単かつ高精度に計算することができる^{10~12)}。これに Newton 法を適用すれば、これらの逆写像を比較的簡単に計算することも可能である^{13, 14)}。

本報告では、代用電荷法に基づいて双方向的な数値等角写像の方法を提案する¹⁵⁾。その原理は、まず問題領域から標準領域への近似写像関数を構成し、得られた境界上の対応関係を用いて、標準領域から問題領域への近似写像関数を同じ方法で逆写像として再構成するというものである。この方法は従来の方法と比較して次のような特徴を備えている。

(a) 問題領域から標準領域への等角写像と標準領域から問題領域への等角写像を全く同一のアルゴリズムで計算することができる。

(b) 標準領域から問題領域への等角写像に非線形の反復収束計算が不要である。

しかも、Laplace 方程式の Dirichlet 問題の数値解法としての代用電荷法の優れた特徴を継承し、原理とプログラミングは簡単であり、数値積分が不要で計算量が少なく、精度が高く、境界上の計算値を用いた簡潔な誤差の評価が可能である。

ここでは、与えられた Jordan 領域と単位円内部との間の等角写像を扱う。

2. 数値等角写像の方法

2.1 Riemann の写像定理

Riemann の写像定理によれば、少なくとも2つの点を含む境界を持つ

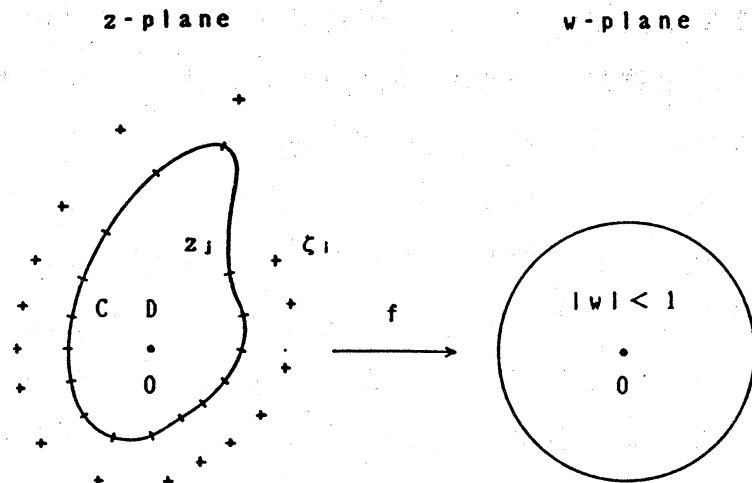


図1 等角写像と代用電荷法

任意の単連結領域は単位円の内部に等角写像することができる。ここでは、 z 平面上に与えられた Jordan 曲線 C で囲まれた Jordan 領域 D から w 平面上の単位円の内部 $|w| < 1$ への等角写像を考える（図1）。その写像関数 $w = f(z)$ は、 D の内部に原点をとれば（問題の一般性を失わない）、正規化条件 $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ の下に一意的に定まり、

$$w = f(z) = ze^{g(z) + ih(z)}, \quad z \in D \quad (1)$$

で与えられる¹⁾。ここに、 $g(z)$ と $h(z)$ は D で共役な調和関数で、 C が単位円に移るための境界条件と正規化条件 $f'(0) > 0$ から、それぞれ

$$g(z) = -\log|z|, \quad z \in C, \quad (2)$$

$$h(0) = 0 \quad (3)$$

を満たさなければならない（ $f(0) = 0$ の成立は明らかである）。

2.2 代用電荷法

代用電荷法に基づいて、この共役な調和関数 $g(z)$ と $h(z)$ を領域 \bar{D} の外部に配置された N 個の電荷点 ζ_i を極とする複素対数ポテンシャルの実部と虚部の1次結合で近似して、問題の等角写像の簡潔かつ高精

度な近似写像関数

$$W = F(z) = ze^{G(z) + iH(z)}, \quad z \in \bar{D} = D + C \quad (4)$$

$$G(z) = -\sum_{i=1}^N Q_i \log|z - \zeta_i|, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} H(z) &= -\sum_{i=1}^N Q_i \arg(z - \zeta_i) + \theta_0 \\ &= -\sum_{i=1}^N Q_i \arg(1 - z/\zeta_i), \end{aligned} \quad (6)$$

を得ることができる¹⁰⁾. ここに,

$$\theta_0 = \sum_{i=1}^N Q_i \arg(-\zeta_i) \quad (7)$$

は正規化条件(3)から定まる回転の定数である. W, F, G, H 等の大文字は近似値を表す. 未定係数である電荷 Q_i は境界 C 上に選ばれた N 個の拘束点 z_j で境界条件(2)を満たすように定められる. すなわち, Q_i は拘束条件と呼ばれる連立 1 次方程式

$$\sum_{i=1}^N Q_i \log|z_j - \zeta_i| = \log|z_j|, \quad z_j \in C \quad (8)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

の解である.

2.3 誤差

誤差の評価には正則関数の最大値の原理を利用することができる. すなわち, $f(z)$ と $F(z)$ はいずれも有界領域 D で 1 価正則, 境界 C 上で連続であるから, 正則関数の最大値の原理により, w 平面上の誤差 $E_w(z)$ は C 上で最大値 E_w をとって,

$$\begin{aligned} E_w(z) &\equiv |W(z) - w(z)| \equiv |F(z) - f(z)| \\ &\leq \max_C |W(z) - w(z)| \equiv E_w \\ &\leq \max_C \{ ||W(z)| - |w(z)|| + |w(z)| |\arg W(z) - \arg w(z)| \} \\ &\leq \max_C ||W(z)| - |w(z)|| + \max_C \{ |w(z)| |\arg W(z) - \arg w(z)| \} \\ &= \max_C ||W(z)| - 1| + \max_C |\arg W(z) - \arg w(z)| \end{aligned} \quad (9)$$

となる. \max_C は境界 C 上での評価を意味する. ここで,

$$\begin{aligned} E_M &\equiv \max_C E_M(z) \equiv \max_C ||W(z)| - 1| \\ &\doteq \max_C |G(z) - g(z)| \equiv \max_C E_G(z) \equiv E_G, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} E_A &\equiv \max_C E_A(z) \equiv \max_C |\arg W(z) - \arg w(z)| \\ &= \max_C |H(z) - h(z)| \equiv \max_C E_H(z) \equiv E_H, \end{aligned} \quad (11)$$

という関係が成立していることに注意する. このとき, $G(z)$ と $H(z)$ の誤差の間に

$$E_G \doteq E_H, \quad (12)$$

すなわち, 絶対値方向の誤差と偏角方向の誤差の間に

$$E_M \doteq E_A \quad (13)$$

という関係の存在することが数値実験的に知られている^{10~12)}. したがって,

$$E_W(z) \leq E_W \leq E_M + E_A \doteq 2E_M \quad (14)$$

という境界上の計算値を用いた簡潔な誤差の評価式を得ることができる.

さらに, 拘束条件(8)は $E_M(z_j) = 0$ と同値であるから, この E_M を

$$E_M \doteq \max_j ||W(z_{j+1/2})| - 1|, \quad z_{j+1/2} \in C \quad (15)$$

と簡単に評価することができる. ここに, $z_{j+1/2}$ は拘束点 z_j と z_{j+1} の間の中間点である.

3. 数値逆等角写像の方法

3.1 写像定理

ここでは w 平面上の単位円の内部 $|w| < 1$ から z 平面上に与えられた Jordan 曲線 C で囲まれた Jordan 領域 D への等角写像を考える (

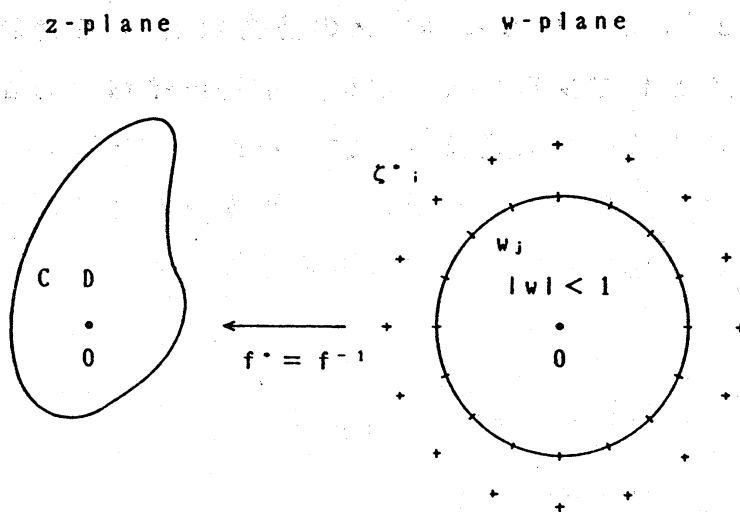


図2 逆等角写像と代用電荷法

図2). その写像関数 $z = f^*(w)$ は, D の内部に原点をとれば(問題の一般性を失わない), 正規化条件 $f^*(0) = 0$, $f^{*'}(0) > 0$ の下に一意的に定まる¹⁾. この等角写像 $z = f^*(w)$ は前述の等角写像 $w = f(z)$ の逆写像 $z = f^{-1}(w)$ に外ならない.

ここで, $w = f(z)$ の場合と同様に, この写像関数を

$$z = f^*(w) = w e^{g^*(w) + i h^*(w)}, \quad |w| < 1 \quad (16)$$

とおけば, $g^*(w)$ と $h^*(w)$ は $|w| < 1$ で共役な調和関数で, 単位円が C に移るための境界条件と正規化条件 $f^{*'}(0) > 0$ から, それぞれ

$$g^*(w) = \log |z| - \log |w|, \quad |w| = 1, \quad (17)$$

$$h^*(0) = 0 \quad (18)$$

を満たさなければならない ($f^*(0) = 0$ の成立は明らかである).

3.2 代用電荷法

ここで, $z = f^*(w)$ の値を等角写像 $w = f(z)$ の近似写像関数 $F(z)$ の逆写像 $F^{-1}(w)$ として求めることを考える. これは, $F(z)$ の場合とまったく同一のアルゴリズムで, 以下のように計算することができる.

まず, $w_j = F(z_j)$, $z_j \in D$ なる N 個の適当な点 w_j を選び, これを w 平面上の拘束点として採用する. 次に, 単位円領域 $|w| \leq 1$ の外部にこの拘束点に対応する適当な電荷点 ζ_j^* を選ぶ. そして, 共役な調和関数 $g^*(w)$ と $h^*(w)$ を ζ_j^* を極とする複素対数ポテンシャルの実部と虚部の 1 次結合で近似して, 問題の等角写像 $z = f^*(w)$ の簡潔な近似写像関数

$$Z = F^*(w) = w e^{G^*(w) + iH^*(w)}, \quad |w| \leq 1 \quad (19)$$

$$G^*(w) = - \sum_{j=1}^N Q_j^* \log |w - \zeta_j^*| \quad (20)$$

$$\begin{aligned} H^*(w) &= - \sum_{j=1}^N Q_j^* \arg(w - \zeta_j^*) + \theta^*_0 \\ &= - \sum_{j=1}^N Q_j^* \arg(1 - w/\zeta_j^*) \end{aligned} \quad (21)$$

を得ることができる. ここに,

$$\theta^*_0 = \sum_{j=1}^N Q_j^* \arg(-\zeta_j^*) \quad (22)$$

は正規化条件(18)から定まる回転の定数である. 未定係数である電荷 Q_j^* は前述の拘束点 w_j で境界条件(17)を満たすように定められる. すなわち, Q_j^* は拘束条件の連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N Q_j^* \log |w_j - \zeta_j^*| &= \log |w_j| - \log |z_j|, \\ j &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (23)$$

の解である. 右辺第 2 項の $z_j = F^{-1}(w_j)$ が上記の拘束点 w_j に対しては既知であることに注意する.

最も簡単には, D から $|w| < 1$ への等角写像の計算に用いられた z 平面上の拘束点 z_j の像 $w_j = F(z_j)$ ($j=1, \dots, N$) を w 平面上の拘束点としてそのまま採用することができる. このとき, w_j が z_j から自動的に定まるというだけでなく, z_j の配置が適切であれば w_j の配置もまた問題の領域 D の形状の情報を良く反映しているという意味で適切であることに注意する. 逆等角写像 $Z = F^*(w)$ の計算に新たなプログラミングの必要はない. 基本的には, z 平面と w 平面の入力と出力の

関係を入れ換えて、 $W=F(z)$ の場合と同じ副プログラムを呼び直すだけでよい。

3.3 誤差

単位円内部 $|w| < 1$ から与えられた Jordan 領域 D への等角写像 $z = f^*(w)$ を、 D から $|w| < 1$ への等角写像 $w = f(z)$ の逆写像 $f^{-1}(w)$ として求める代わりに、その近似写像関数 $W = F(z)$ の逆写像 $F^{-1}(w)$ として、 $Z = F^*(w)$ なる代用電荷法で計算した。この場合にも、誤差の評価には正則関数の最大値の原理を利用することができる。

まず、 $F^*(w)$ と $F^{-1}(w)$ はいずれも有界領域 $|w| < 1$ で 1 価正則、境界 $|w| = 1$ 上で連続であるから、正則関数の最大値の原理により、 $F^*(w)$ の $F^{-1}(w)$ に対する誤差 $E_{F^*}(w)$ は境界上で最大値 E_{F^*} をとって、

$$\begin{aligned} E_{F^*}(w) &\equiv |F^*(w) - F^{-1}(w)| \\ &\leq \max_{C^*} |F^*(w) - F^{-1}(w)| \equiv E_{F^*} \\ &\doteq \max_k |F^*(w_k) - z_k| \end{aligned} \quad (24)$$

となる。ここに、 \max_{C^*} は単位円 $|w| = 1$ 上での評価を意味する。また、添字の k は前述の拘束点と中間点における評価であることを意味している。一方、 $F^{-1}(w)$ の $f^{-1}(w)$ に対する誤差は、同様に、

$$\begin{aligned} E_{F^{-1}}(w) &\equiv |F^{-1}(w) - f^{-1}(w)| \\ &\leq \max_{C^*} |F^{-1}(w) - f^{-1}(w)| \equiv E_{F^{-1}} \\ &\doteq \max_{C^*} \{|(F(z) - f(z))| / |F'(z)|\} \\ &\leq E_w / \min_{C^*} |F'(z)| \equiv \tilde{E}_{F^{-1}} \\ &\doteq E_w / \min_k |F'(z_k)| \end{aligned} \quad (25)$$

となる。ここでは、最大値の原理とともに、正則関数の局所的な拡大率とその導関数の絶対値に等しいことを用いている。 $F'(z) \neq 0$ は等角性の必要条件である。したがって、全体の誤差は

$$E_z(w) \equiv |F^*(w) - f^{-1}(w)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max_c |F^*(w) - f^{-1}(w)| \equiv E_z \\
&\leq \max_c \{|F^*(w) - F^{-1}(w)| + |F^{-1}(w) - f^{-1}(w)|\} \\
&\leq E_F^* + E_F^{-1} \\
&\leq E_F^* + \tilde{E}_F^{-1} \equiv \tilde{E}_z
\end{aligned} \tag{26}$$

となる.

\tilde{E}_F^{-1} と \tilde{E}_z の値は $F(z)$ の誤差と逆写像によるその拡大率 $1/|F'(z)|$ が同一の点で最大値をとるという最悪の想定に基づいていることに注意する. 実際には,

$$E_z \approx E_F^* \ll \tilde{E}_z \tag{27}$$

という関係の成立していることが多い.

4. 数値実験

拘束点と電荷点の配置には次のような方法を採用する. すなわち, まず与えられた領域の境界の形状の変化の大きい部分で密になるように適当な拘束点 z_i ($i=1, \dots, N$) を選び, 次いで各拘束点に対応する電荷点を

$$\zeta_i = z_i + r|z_i - z_{i-1}|e^{i\{\arg(z_i - z_{i-1}) - \pi/2\}} \tag{28}$$

で配置する. 配置のパラメータ r (>0) の値はすべての i に対して一定である. その結果, 電荷点に対応する拘束点を通る法線の方角にあって, 形状の変化の大きい部分で密かつ境界近くに分布するような配置が得られる. この方法は, 計算が簡単で, パラメータはただ1つであり, その値の変化に対する計算精度の変化も簡単かつ規則的で, 広い範囲にわたって高い精度を得ることができる. しかも, なめらかな境界を持つ任意 (凸または凹, 星形 (starlike) または非星形, 内部問題または外部問題) の領域に適用可能である (境界が角を持つ場合でも (28) 式に多少の修正を加えればよい). w 平面上の拘束点は, 前述のように, z 平

面上の拘束点の像として自動的に定まる。また、 w 平面上の電荷点も (28)式に従って機械的に配置される。

計算結果の提示に用いた記号は次のとおりである。

N : 電荷数=拘束点数。括弧内の数字は対称性を利用した場合の拘束条件の連立1次方程式の元の数。

r_z, r_w : z 平面上と w 平面上の電荷配置のパラメータ。

誤差の評価式をまとめて以下に記す。

$$E_M \doteq E_G = \max_j | |F(z_{j+1/2})| - 1 |$$

$$E_A \doteq E_H = \max_k | \arg F(z_k) - \arg f(z_k) |$$

$$E_W = \max_k | F(z_k) - f(z_k) |$$

$$E_{F^*} = \max_k | F^*(w_k) - z_k |, \quad w_k = F(z_k)$$

$$E_{F^{-1}} = \max_k | z_k - f^{-1}(w_k) |$$

$$E_Z = \max_k | F^*(w_k) - f^{-1}(w_k) |$$

$$\tilde{E}_{F^{-1}} = E_W / \min_k | F'(z_k) |$$

$$\tilde{E}_Z = E_{F^*} + \tilde{E}_{F^{-1}}$$

前述のように、添字の k は境界上の拘束点と中間点における評価を意味している。 $E_M, E_{F^*}, \tilde{E}_{F^{-1}}, \tilde{E}_Z$ の値は真の写像関数が知られていなくても計算可能である。

数値実験には、愛媛大学情報処理センターの FACOM M-360AP システムを利用した。

例 Cassini の楕形 (図3, 表1)

問題領域 $\{(x+1)^2 + y^2\} \{(x-1)^2 + y^2\} \leq a^4$

写像関数 $w = f(z) = az / (a^4 - 1 + z^2)^{1/2}$

$$z = f^{-1}(w) = (a^4 - 1)^{1/2} w / (a^2 - w^2)^{1/2}$$

拘束点 $x_j = r \cos \theta, \quad y_j = r \sin \theta$

$$r = \{ \cos 2\theta + (\cos^2 2\theta + a^4 - 1)^{1/2} \}^{1/2},$$

$$\theta = 2\pi(j-1)/N$$

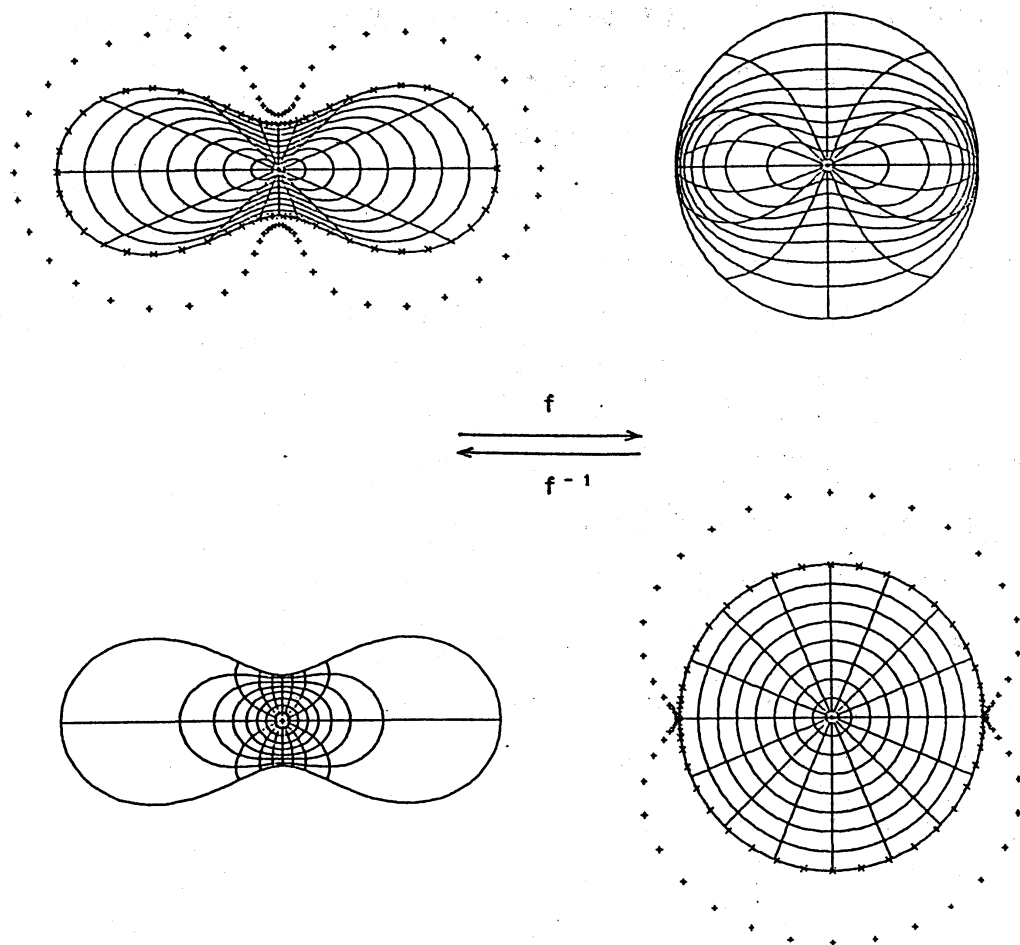


図3 数値等角写像 (Cassini の楕形)

境界の形状は、 $a = 2^{1/2}$ では楕円 $x^2/3 + y^2 = 1$ に似ていて、 a の値の減少とともに凹部の幅が狭くなり、 $a = 1$ では原点で二分される。図3は表1(b) ($a = 1.044273$) の場合である。(c) ($a = 1.005430$) では、凹部の幅は(b)の場合の約 $1/3$ になる。 z 平面上の拘束点は境界を偏角で等分割して配置する。その他の拘束点と電荷点は前述のように機械的に定められる。

この例では、初等的な写像関数が知られていて、これとの比較による誤差の評価が可能である。表1の E_w と E_z の値はいずれも問題の等角写像と逆写像の計算精度が高いことを示している。このとき、誤差の関係式(13)と(14)および(27)の成立を確認することができる。パラメータ

表1 誤差評価 (Cassini の楕形)

	(a)	(b)	(c1)	(c2)
a	$2^{1/2}$	$2^{1/16}$	$2^{1/128}$	
N	32 (9)	64 (17)	64 (17)	128 (33)
r_z	2.5	2.0	1.0	2.5
r_w	3.0	2.5	1.5	2.5
E_H	$2.8E-6$	$1.9E-5$	$2.6E-4$	$8.9E-7$
E_A	$3.6E-6$	$3.9E-6$	$2.1E-4$	$7.0E-7$
E_W	$3.7E-6$	$1.7E-5$	$2.7E-4$	$8.9E-7$
E_F	$5.9E-6$	$2.9E-5$	$1.9E-3$	$1.7E-5$
E_F^{-1}	$8.4E-6$	$3.6E-5$	$2.8E-3$	$1.9E-6$
E_z	$6.3E-6$	$3.1E-5$	$3.4E-3$	$1.6E-5$
\tilde{E}_F^{-1}	$1.3E-5$	$3.0E-4$	$3.5E-2$	$1.1E-4$
\tilde{E}_z	$1.9E-5$	$3.2E-4$	$3.7E-2$	$1.3E-4$

(c2) 倍精度

a の値が 1 に近づく程, 計算精度は低下し, E_F^{-1} と \tilde{E}_F^{-1} および E_z と \tilde{E}_z の差異も大きくなる. しかし, 電荷数を増して倍精度計算を行えば計算精度は大幅に向上する.

5. おわりに

与えられた Jordan 領域と単位円内部との間の双方向的な数値等角写像の方法を提案し, 数値実験的にその有効性を確認した. 実際には, 数値実験は偏心率 (凸形領域), Cassini の楕形 (凹形領域), 正方形 (角を持つ領域), 勾玉形 (非対称, 非星形領域) という異なる性質を持つ 4 種の領域に対して行なわれている. 結果はこの報告と同じ標題の論文として投稿中である. なお, 提案された方法の原理は外部領域や 2 重連結領域の等角写像の問題にも適用可能である.

代用電荷法に関しては, 数値計算の実際面での成功にもかかわらず, 数学的には未解決な問題が少なくない¹⁶⁾. 収束証明をはじめ, 理論的な側面の研究^{17~19)}の一層の進展が望まれる.

参考文献

- 1) Henrici, P.: Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 3, pp. 323-570, John Wiley & Sons, New York (1986).
- 2) Trefethen, L. N. (ed.): Numerical Conformal Mapping, 269 p., North-Holland, Amsterdam (1986); reprinted from J. Comput. Appl. Math., Vol. 14, No. 1&2 (1986).
- 3) Symm, G. T.: An Integral Equation Method in Conformal Mapping, Numer. Math., Vol. 9, pp. 250-258 (1966).
- 4) Symm, G. T.: Numerical Mapping of Exterior Domains, Numer. Math., Vol. 10, pp. 437-445 (1967).
- 5) Symm, G. T.: Conformal Mapping of Doubly-Connected Domains, Numer. Math., Vol. 13, pp. 448-457 (1969).
- 6) Gutknecht, M. H.: Solving Theodorsen's Integral Equation for Conformal Maps with the Fast Fourier Transform and Various Nonlinear Iterative Methods, Numer. Math., Vol. 36, pp. 405-429 (1981).
- 7) Gutknecht, M. H.: Numerical Experiments on Solving Theodorsen's Integral Equation for Conformal Maps with the Fast Fourier Transform and Various Nonlinear Iterative Methods, SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol. 4, No. 1, pp. 1-30 (1983).
- 8) 宋 殷志, 杉浦 洋, 櫻井鉄也: 数値等角写像における Theodorsen 方程式の解法, 情報処理学会論文誌, Vol. 30, No. 4, pp. 393-401 (1989).
- 9) 村島定行: 代用電荷法とその応用, 194 p., 森北出版, 東京 (1983).
- 10) 天野 要: 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 28, No. 7, pp. 697-704 (1987).

- 11) 天野 要：代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol. 29, No. 1, pp. 62-72 (1988).
- 12) 天野 要：代用電荷法に基づく2重連結領域等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol. 29, No. 10, pp. 914-924 (1988).
- 13) 天野 要，高松孝安，安倍 齊：代用電荷法とNewton法による逆等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol. 30, No. 4, pp. 411-418 (1989).
- 14) 天野 要，高松孝安，安倍 齊：代用電荷法とNewton法による外部逆等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol. 30, No. 8, pp. 923-931 (1989).
- 15) 天野 要：代用電荷法に基づく等角写像とその逆写像の数値計算法，情報処理学会研究報告，Vol. 89, No.86, 89-NA-30-8 (1989).
- 16) 岡本 久：代用電荷法における数学的問題について，数理解析研究所講究録703「境界要素法の数学的理論とその周辺(II)」，pp. 141-156 (1989).
- 17) Katsurada, M. and Okamoto, H.: A Mathematical Study of the Charge Simulation Method I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Vol. 35, No. 3, pp. 507-518 (1988).
- 18) Katsurada, M.: A Mathematical Study of the Charge Simulation Method II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Vol. 36 (1989, to appear).
- 19) Kitagawa, T.: On the Numerical Stability of the Method of Fundamental Solution Applied to Dirichlet Problem, Japan J. Appl. Math., Vol. 5, No. 1., pp. 123-133 (1988).